Feuille d'exercices sur la récursivité

Exercice 1 : On appelle **fonction récursive de Ackermann** la fonction Ack qui pour deux entiers naturels m et n associe l'entier Ack(m,n) défini par :

$$\text{Ack}(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } m = 0 \\ \text{Ack}(m-1,1) & \text{si } m > 0 \text{ et } n = 0 \\ \text{Ack}(m-1,\text{Ack}(m,n-1)) & \text{si } m > 0 \text{ et } n > 0 \end{cases}$$

1) Calculer à la main :
   a) Ack(0,1) b) Ack(0,2) c) Ack(1,0) d) Ack(2,0) e) Ack(1,2)

   Indications : Vous pouvez utiliser les résultats précédents pour calculer les suivants.
2) Compléter la fonction Python suivante :

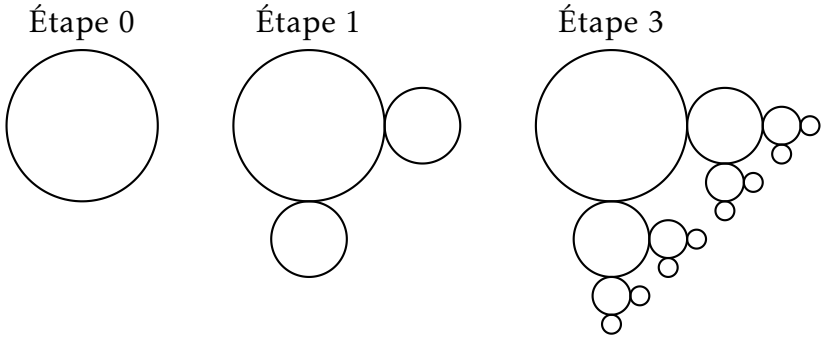
```
def ack(m, n):
    if ..................... :
        return .....................
    elif ..................... :
        return .....................
    else:
        return .....................
```

Exercice 2 : On considère cette fonction :

```
def mystere(n):
    if n < 10:
        return n
    else:
        return n%10 + mystere(n//10)
```

1) Déterminer le résultat de :
   a) `mystere(5)`
   b) `mystere(24)`
   c) `mystere(2048)`
2) Que fait la fonction `mystere(n)` ?

Exercice 3 : Le schéma ci-dessous représente une figure fractale à différentes étapes.



La construction vérifie les propriétés suivantes :

- Les cercles voisins sont tangents, c'est-à-dire qu'ils se touchent en un seul point.
- Le rayon est divisé par deux lorsqu'on va vers la droite ou le bas.
- Deux cercles tangents ont des centres qui ont la même abscisse ou la même ordonnée.

Vous disposez d'une fonction `cercle(x, y, r)` qui trace un cercle de centre `(x, y)` et de rayon `r`.
Écrire une fonction récursive `fractale(x, y, r, etape)` qui trace la fractale à l'étape `etape`, avec le grand cercle centré en `(x, y)` et de rayon `r`.

```
def fractale(x, y, r, etape):
```

Exercice 4 : On considère une structure de listes chaînées avec les fonctions suivantes : `tete`, `queue` et `est_vide`. Écrire une fonction récursive `maximum1(liste)` qui renvoie la valeur maximale de la liste chaînée non vide `liste`. Attention, le cas de base n'est donc pas de la liste vide mais de la liste avec un seul élément. Vous pouvez utiliser la fonction `max(a, b)` qui renvoie le maximum des deux valeurs.

1) S'il n'y a qu'un seul élément, comment déterminer le maximum ?
2) S'il y 2 éléments ou plus, comment déterminer `maximum1(liste)` à l'aide de `tete(liste)` et `maximum1(queue(liste))` ?
3) Compléter le code ci-dessous :

```
def maximum1(liste):
    if ..... : # Il ne reste qu'un élément
        return .....
    else:
        return .....
```

Exercice 5 : La fonction récursive `maximum2(tab, i)` renvoie la valeur maximale contenue dans le tableau `tab` à partir de l'indice `i`. On suppose que $0 \leq$ `i` $\leq$ `len(tab)` $- 1$ et que `tab` est non vide.

1) Quelle est la plus grande valeur possible pour `i` par rapport à `tab` ?
2) Comment déterminer `maximum2(tab, i)` si on connait `tab[i]` et `maximum2(tab, i+1)` ?
3) Compléter le code ci-dessous :

```
def maximum2(tab, i):
    if ..... :
        return .....
    else:
        return .....
```

Exercice 6 : On souhaite écrire une fonction récursive `binaire(n)` qui convertit un entier positif `n` en binaire. Les nombres binaires seront représentés par des chaînes de caractères avec le bit de poids fort à gauche et celui de poids faible à droite. Ainsi `binaire(4)` = `'100'`.

1) Déterminer une relation entre `binaire(n)`, `binaire(n//2)` et `str(n%2)`.
2) En déduire une version python de `binaire(n)`.

```
def binaire(n):
```