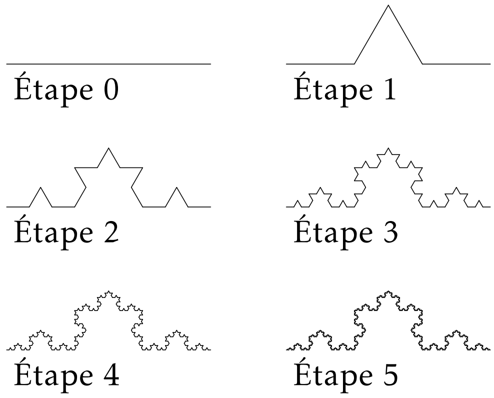
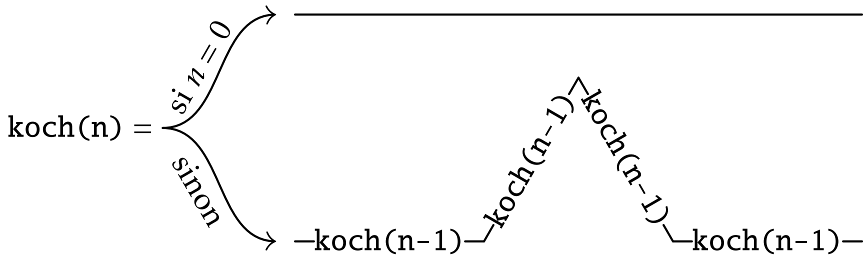
Lycée Les 3 Sources — **Bourg-Lès-Valence**
Maths/NSI — Année **2022-23**

Beautés fractales

Une première fractale

Une **fractale** est une figure géométrique qui se répète indéfiniment, peu importe à quel niveau de zoom on la regarde. On dit qu'elle est **auto-similaire**. La figure ci-contre est une des figures les plus connues, appelée la courbe de Koch et inventée en 1904. La fractale est obtenue lorsqu'on répète les étapes à l'infini. Si on zoom sur n'importe quelle branche, on obtient exactement la même figure.
Appelons `koch(n)` la figure obtenue à l'étape `n`. Afin de décrire comment la dessiner, les plus simple est d'utiliser la méthode présentée ci-dessous :

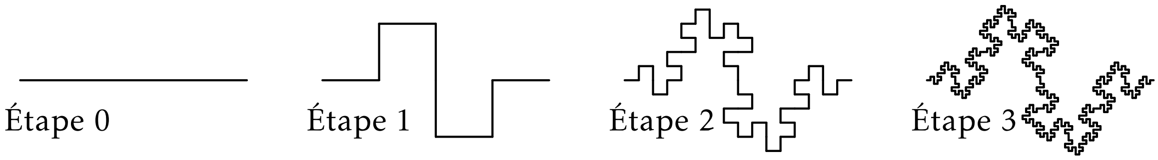




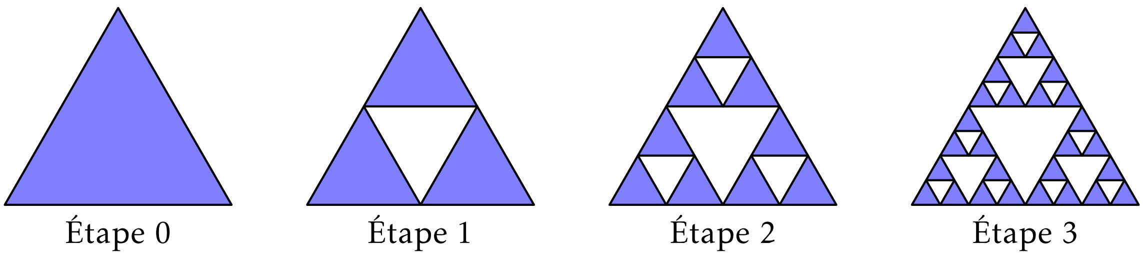
Si `n` vaut 0, on fait un segment. Sinon, on dessine 4 fois `koch(n-1)`, elle-même obtenue en utilisant la même méthode.
On appelle cela une **définition récursive**, c'est-à-dire qu'on définit une valeur initiale et ensuite un processus permettant de construire une nouvelle valeur à partir des précédentes. Ce genre de définition est très utilisé dans la plupart des langages de programmation, comme c'est le cas avec Python.

Exemples de fractales

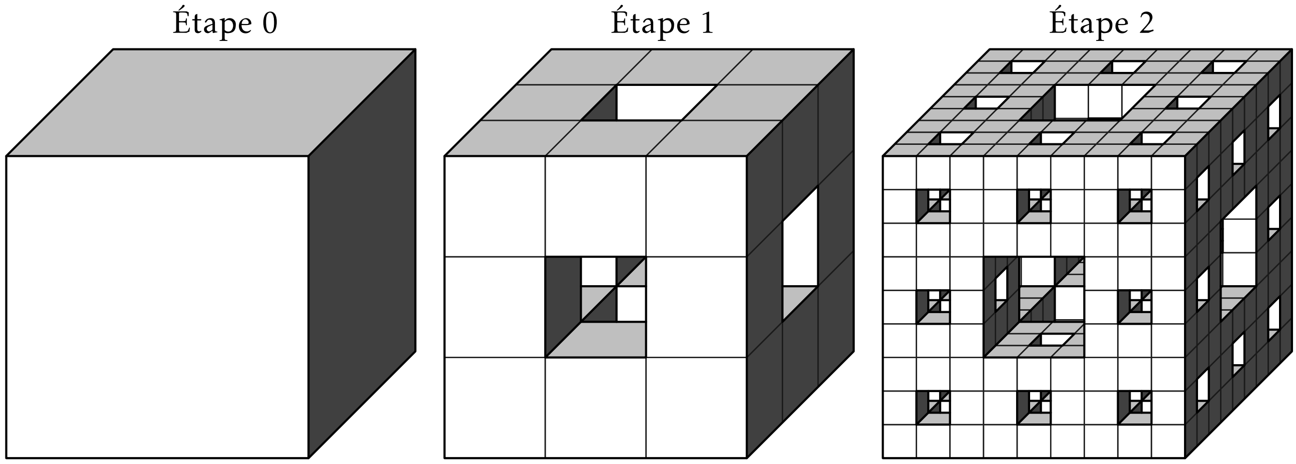
Il existe plusieurs variantes de la courbe de Koch. Par exemple, la **saucisse de Minkowski** est définie ainsi :



Les fractales ne sont pas uniquement formées à partir de courbes. Elles peuvent aussi être construites à l'aide de surfaces, comme c'est le cas pour le **triangle de Sierpinski** :



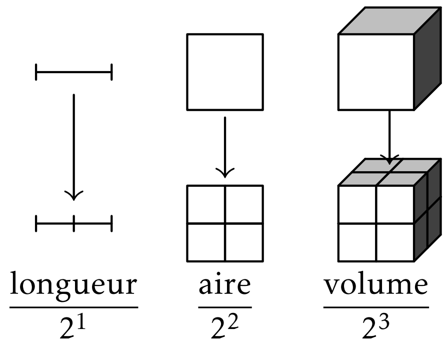
De la même manière, on peut faire des fractales à l'aide de solides, comme pour l'**éponge de Menger** :



Dimension fractale

La notion de dimension est justement une particularité des fractales. Un point est de dimension 0, une courbe a une dimension de 1, une surface a une dimension de 2 et un solide a une dimension de 3. C'est la **dimension topologique**.

Pour simplifier la suite, on appellera **mesure** la longueur pour une courbe, l'aire pour une surface et le volume pour un solide. Lorsqu'on divise la longueur par 2, la mesure d'un objet de dimension d est divisée par 2^d, comme le montre la figure ci-contre. De façon générale, si M est la mesure du objet de dimension d, si on divise les longueurs par k, la mesure est alors $\dfrac{M}{k^d}$.
Pour les fractales, c'est rarement aussi simple.



Par exemple, on peut découper la courbe de Koch en 4 morceaux, chacun 3 fois plus petits que la figure initiale. La longueur est divisée par 3, mais la mesure est divisée par 4. Cela ne correspond pas au schéma précédent. C'est parce que cette fractale n'est pas vraiment une courbe au sens classique du terme. Elle n'est donc pas de dimension 1. Si on note d la dimension de la figure, on a alors $\dfrac{M}{3^d} = \dfrac{M}{4}$. On en déduit que $3^d = 4$.
Pour résoudre cette équation, il faut utiliser le **logarithme en base 3**. En effet, $\log_3(k)$ est la solution de l'équation $3^x = k$. On a donc $d = \log_3(4) \approx 1{,}26$.
Pour obtenir ce résultat avec une calculatrice, il faut écrire `log(4, 3)`.
On peut également calculer $\log_3(4) = \dfrac{\log(4)}{\log(3)}$, où log est en fait le logarithme en base 10.
On appelle cette dimension trouvée, la **dimension fractale** de la courbe de Koch.

Exercice 1 : Démontrer que la dimension fractale est d'environ :
1) 1,5 pour la saucisse de Minkowski.
2) 1,58 pour le triangle de Sierpinski.
3) 2,73 pour l'éponge de Menger.

On peut remarquer que la courbe de Koch a une dimension entre 1 et 2. Cela veut dire qu'elle est entre une courbe et une surface. Par exemple, sa longueur est infinie. En effet, si le segment à l'étape 0 est de longueur 1, à l'étape 1 la figure mesure $\dfrac{4}{3}$ puis $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$ à l'étape 2 et ainsi de suite. La longueur de la courbe est la limite de $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ lorsque n tend vers l'infini. Cette longueur est donc infinie.

Exercice 2 : On considère le triangle de Sierpinski.

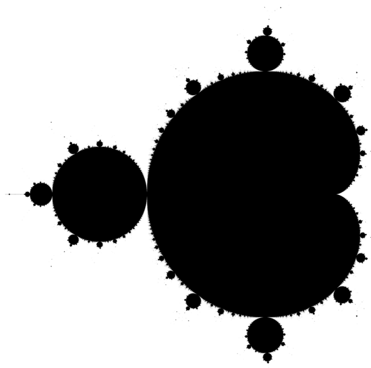
1) Démontrer que le périmètre est infini.
2) Démontrer que la surface est nulle.

Exercice 3 : On considère l'éponge de Menger.

1) Déterminer le volume de l'éponge.
2) Soit A_n la surface de l'éponge à l'étape n.
   a) Démontrer que $A_{n+1} \geq A_n$. On pourra considérer les faces visibles à l'étape n.
   b) En fait, $A_n = 2\left(\frac{20}{9}\right)^2 + 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$. En déduire l'aire de l'éponge.

Vers l'ensemble de Mandelbrot

Toutes les fractales que nous avons vu jusqu'à présent sont auto-similaires. Mais toutes les fractales n'ont pas forcément cette propriété. Pour être une fractale, il faut que la figure ait un niveau de détail infini. D'ailleurs, une des fractales les plus connues n'a pas cette propriété. C'est **l'ensemble de Mandelbrot**. Cette fractale ne ressemble à aucune de celles que nous avons vu jusqu'à présent. Elle n'est pas définie par un principe de construction mais plutôt par une formule mathématique.



Cet ensemble a été défini au début du 20^e siècle par Gaston Julia et Pierre Fatou mais c'est Benoit Mandelbrot qui l'a rendu célèbre en générant les premières visualisations en 1980.

Exercice 4 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + c$ pour un certain réel c. Calculer les premières valeurs de (u_n) avec :

1) $c = 1$
2) $c = 2$
3) $c = -1$
4) $c = -2$
5) $c = -3$
6) $c = 0{,}2$

Pour certaines valeurs de c, la suite semble converger. Pour d'autres, elle alterne entre plusieurs valeurs. Enfin, pour d'autres valeurs, la suite diverge vers l'infini.
On peut donc caractériser les valeurs de c ainsi : soit elles engendrent une suite divergente vers l'infini, soit elles engendrent une suite dont les valeurs restent bornées. L'ensemble de Mandelbrot est une généralisation de ce principe à tous les points du plan.

Nombres complexes

Il y a plusieurs façon d'associer un nombre c à chaque point du plan. Nous allons utiliser **les nombres complexes**.
L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Mais imaginons qu'elle ait une solution qui serait un nouveau type de nombres. Notons i cette solution. On a donc $i^2 = -1$. On dit que ce nombre est **imaginaire**, puisqu'il n'est pas réel. Un **nombre complexe** z est un nombre de la forme $z = a + ib$, avec a et b deux réels. Le nombre a est la **partie réelle** de z et b la **partie imaginaire**. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
L'ensemble des nombres complexes contient l'ensemble des nombres réels. Ce sont les nombres complexes qui n'ont pas de partie imaginaire.

Exercice 5 : Déterminer le résultat des expressions suivantes.
1) $(2+5i)+(3-i)=$
2) $(2+5i)\times(3-i)=$
3) $(1+i)^2=$
4) $(-0{,}5+0{,}2i)^2=$

Puisque chaque nombre complexe est défini par un couple $(a;b)$, on peut facilement associer chaque point $\mathrm{M}(x;y)$ au nombre complexe $z=x+iy$.
Soit $z=a+ib$ un nombre complexe associé au point M. On note $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ **le module** de z. On remarque que $|z|=\mathrm{OM}$, où O est l'origine du repère orthonormé considéré.

Exercice 6 : Calculer :
1) $|2+5i|=$
2) $|3-i|=$
3) $|-0{,}5+0{,}2i|=$

L'ensemble de Mandelbrot

Un nombre complexe c appartient à l'ensemble de Mandelbrot si la suite (z_n), telle que $z_0=0$ et $z_{n+1}=z_n^2+c$, est bornée. C'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $|z_n|<k$ pour tout n.
Les calculs sont relativement fastidieux à faire à la main. C'est pourquoi on utilise un ordinateur pour calculer un grand nombre de valeurs de (z_n). Mais à partir de quel rang peut-on être sûr que la suite est bornée ou non ? Il a été démontré que si $|z_n|>2$ pour un certain rang, alors la suite est divergente vers l'infini.
Pour afficher l'ensemble de Mandelbrot, on calcule pour chaque point de l'image si le nombre complexe c associé appartient à l'ensemble ou pas. On calcule le module des premiers termes de la suite engendrée par c. Si au bout d'un certain nombre d'itérations le module n'a pas dépassé 2, on considère que c est dans l'ensemble de Mandelbrot. En général, on colorie en noir les points de l'ensemble. Pour les autres points, on peut associer une couleur correspondant au nombre d'itérations nécessaires pour que le module dépasse 2.
Cet ensemble est fascinant parce qu'en zoomant sur n'importe quel endroit de la frontière, on observe des motifs très particuliers qui sont à la fois semblables avec ceux qui sont à côté et très différents de ceux observés à d'autres endroits. On peut aussi relier cet ensemble à d'autres éléments mathématiques bien connus, comme la suite de Fibonacci ou le nombre d'or.