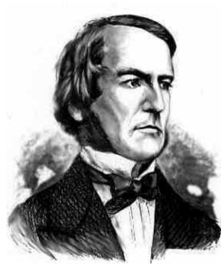
Lycée Les 3 Sources — **Bourg-Lès-Valence**

NSI 1re – Thème 1 — Année **2022-23**

Algèbre de Boole

Repères historiques



Georges Boole (1815–1864) était un mathématicien britannique qui a, entre autre, défini un représentation des opérations logiques à l'aide d'opérations mathématiques.
On appelle cette modélisation **l'algèbre de Boole** et elle est à la base du fonctionnement des ordinateurs et plus généralement de tous les systèmes électroniques.

Tu sais compter jusqu'à 1 ?

L'algèbre de Boole est basée sur un ensemble de 2 valeurs B = {0; 1} sur lequel on définit 2 opérations **et** et **ou**. On appelle **booléens** les élèments de B.
Puisqu'il y a peu de cas possibles, on définit ces opérations à l'aide des tableaux de ci-contre, qu'on appelle **table de vérité**.

a	b	a et b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	a ou b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Le 0 et le 1 servent généralement à représenter une proposition fausse ou vraie. Ainsi, le **et** peut être considéré comme étant "les deux propositions sont vraies" et le **ou** comme "au moins une des deux propositions est vraie". On remarque que a ou b est vraie même si les deux sont vraies. On dit que c'est le **ou inclusif**.

On définit également une transformation **non** qui inverse la valeur de l'élément.

a	non a
0	1
1	0

Il existe de nombreuses notations pour B et les opérations.

	0	1	a et b	a ou b	non a
logique	$\perp$	$\top$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$\neg a$
informatique	False	True	$a \& b$	$a \mid b$	$!\,a$
algébrique	0	1	$a.b$	$a+b$	$\overline{b}$

Propriétés

Toutes les égalités suivantes sont vraies pour tous booléens a, b et c.

- **Complémentarité :**

$$a \text{ ou } (\text{non } a) = 1 \qquad a \text{ et } (\text{non } a) = 0 \qquad \text{non } (\text{non } a) = a$$

- **Commutativité :**

$$a \text{ ou } b = b \text{ ou } a \qquad a \text{ et } b = b \text{ et } a$$

- **Associativité :**

$$(a \text{ ou } b) \text{ ou } c = a \text{ ou } (b \text{ ou } c) = a \text{ ou } b \text{ ou } c$$
$$(a \text{ et } b) \text{ et } c = a \text{ et } (b \text{ et } c) = a \text{ et } b \text{ et } c$$

- **Distributivité :**

$$a \text{ et } (b \text{ ou } c) = (a \text{ et } b) \text{ ou } (a \text{ et } c) \qquad a \text{ ou } (b \text{ et } c) = (a \text{ ou } b) \text{ et } (a \text{ ou } c)$$

Démonstrations

L'avantage de n'avoir que 2 valeurs, c'est qu'il est facile de vérifier qu'une propriété est vraie en testant toutes les valeurs possibles.

Exercice 1 : Démontrer les deux égalités de la distributivité à l'aide des tables de vérité suivantes :

a	b	c	b ou c	a et (b ou c)
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

a	b	c	a et b	a et c	(a et b) ou (a et c)
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

a	b	c	b et c	a ou (b et c)
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

a	b	c	a ou b	a ou c	(a ou b) et (a ou c)
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Exercice 2 : Le mathématicien britannique **Auguste de Morgan** (1806–1871) a également contribué à développer l'algèbre de Boole à l'aide de son théorème :

$$\text{non } (a \text{ ou } b) = (\text{non } a) \text{ et } (\text{non } b) \qquad \text{non } (a \text{ et } b) = (\text{non } a) \text{ ou } (\text{non } b)$$

Démontrer ce théorème à l'aide des tables ci-dessous :

a	b	a ou b	non (a ou b)
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

a	b	non a	non b	(non a) et (non b)
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

a	b	a et b	non (a et b)
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

a	b	non a	non b	(non a) ou (non b)
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Une nouvelle opération

En français, quand on dit *“fromage ou dessert”*, c'est l'un ou l'autre. Ce qui n'est pas le cas du **ou** utilisé dans les booléens.
On appelle **ou exclusif** ou **xor** l'opération définie par la table ci-contre.

a	b	a xor b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exercice 3 : Donner une expression utilisant **ou**, **et** et **non** et équivalente à a xor b.

Exercice 4 : Soit en utilisant des propriétés, soit en utilisant les tables de vérités, simplifier les expressions suivantes :

1) a ou (a et b)
2) a et (a ou b)
3) a ou ((non a) et b)
4) (a ou b) et ((non a) ou b)
5) (a xor b) ou (a et b)
6) (a xor b) et (a ou (non b))

Pour aller plus loin

L'algèbre de Boole sert pour définir les bases de la logique. Pour cela, il faut définir l'implication $a \Rightarrow b$ qui signifie que si a est vraie, alors b l'est aussi. La table de vérité est ci-contre.
On peut définir l'implication par l'expression "(non a) ou b".

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exercice 5 : À l'aide de tables de vérité ou en simplifiant les expressions, démontrer que $a \Rightarrow b$ et (non b) $\Rightarrow$ (non a) sont équivalents.

Exercice 6 : Les opérateurs **et**, **ou**, **xor** et $\Rightarrow$ ne sont pas les seuls opérateurs à 2 paramètres que l'on peut définir. En fait il y en a 16.

1) Justifier pourquoi il n'y a que 16 opérateurs logiques à 2 paramètres. Vous pourrez regarder les tableaux de valeurs des opérateurs de base.
2) Compléter la table suivante en indiquant tous les opérateurs et en identifiant les opérateurs connus et en essayant d'exprimer les autres à partir des opérateurs connus.

a	b	o_0	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7	o_8	o_9	o_{10}	o_{11}	o_{12}	o_{13}	o_{14}	o_{15}
0	0																
0	1																
1	0																
1	1																

Exercice 7 : **David Hilbert** (1862–1943) était un mathématicien allemand qui a essayé de déterminer les axiomes de base permettant de définir et démontrer l'ensemble des propriétés mathématiques. Pour la logique il a donné une liste d'axiomes, qui peuvent s'exprimer ainsi :

- $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$
- ((non b) $\Rightarrow$ (non a)) $\Rightarrow (a \Rightarrow b)$
- (a et b) $\Rightarrow a$
- $a \Rightarrow$ (a ou b)
- (a ou b) $\Rightarrow ((a \Rightarrow c) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow c))$
- $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$
- $a \Rightarrow (b \Rightarrow$ (a et b))
- (a et b) $\Rightarrow b$
- $b \Rightarrow$ (a ou b)

Vérifier que ces axiomes sont vrais dans l'algèbre de Boole. C'est-à-dire que leurs tables de vérité ne contiennent que des 1.